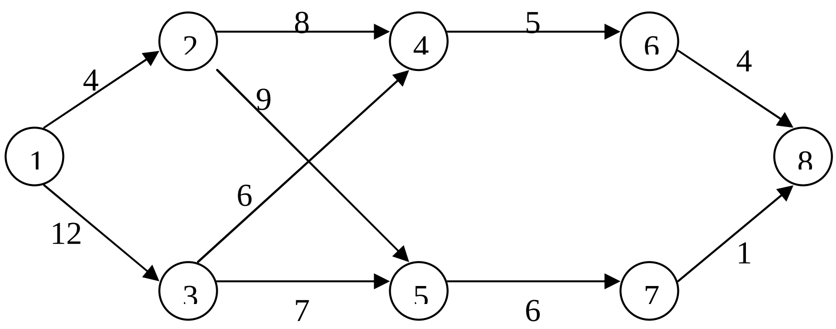
Programmazione dinamica: dal Problema della diligenza all'ottimizzazione della Logistica

Luca Bertazzi

1) Il problema della diligenza

Dato il seguente grafo



determinare un cammino a costo minimo dal nodo 1 al nodo 8 applicando la completa enumerazione e la programmazione dinamica. Determinare inoltre l’errore percentuale rispetto all’ottimo ottenuto applicando l’algoritmo Greedy. Infine, modificare il peso di uno degli archi del grafo al fine di ottenere un errore percentuale tendente ad infinito.

Soluzione

1) Completa enumerazione:

1 ➔ 2 ➔ 4 ➔ 6 ➔ 8 costo: 4+8+5+4 = 21
1 ➔ 2 ➔ 5 ➔ 7 ➔ 8 costo: 4+9+6+1 = 20
1 ➔ 3 ➔ 4 ➔ 6 ➔ 8 costo: 12+6+5+4 = 27
1 ➔ 3 ➔ 5 ➔ 7 ➔ 8 costo: 12+7+6+1 = 26

La soluzione ottima è 1 ➔ 2 ➔ 5 ➔ 7 ➔ 8. Il costo ottimo è $z^* = 20$.

2) Programmazione dinamica:

Partiamo dal quarto stadio:

$i \to j$	8	$J_4{}^*(i)$	$u_4{}^*(i)$
6	4	4	8
7	1	1	8

Consideriamo ora lo stadio 3:

$i \to j$	6	7	$J_3{}^*(i)$	$u_3{}^*(i)$
4	5+4=9	-	9	6

5	-	6+1=7	7	7

Consideriamo ora lo stadio 2:

$i \to j$	4	5	$J_2*(i)$	$u_2*(i)$
2	8+9=17	9+7=16	16	5
3	6+9=15	7+7=14	14	5

Consideriamo infine lo stadio 1:

$i \to j$	2	3	$J_1*(i)$	$u_1*(i)$
1	4+16=20	12+14=26	20	2

Ricostruiamo il cammino a costo minimo:

1 ➔ 2 ➔ 5 ➔ 7 ➔ 8

Il corrispondente costo totale $z*$ è $J_1*(1)$, vale a dire 20 (che corrisponde a 4+9+6+1).

c) Algoritmo Greedy:

Applichiamo ora l’algoritmo Greedy al fine di determinare una soluzione euristica del problema. Otteniamo quindi la seguente soluzione:

1 ➔ 2 ➔ 4 ➔ 6 ➔ 8 costo: z^G =4+8+5+4 = 21.

Determiniamo l’errore percentuale rispetto all’ottimo ottenuto applicando l’algoritmo greedy:

$$\frac{z^G - z*}{z*}*100 = \frac{21-20}{20}*100 = 5\%$$

Un errore percentuale tendente ad infinito si ottiene modificando il peso dell’arco fra il nodo 4 e il nodo 6 o dell’arco fra il nodo 6 e il nodo 8. Infatti, questi archi non appartengono alla soluzione ottima del problema e sono sicuramente scelti applicando l’algoritmo Greedy. Indichiamo il peso dell’arco fra il nodo 4 e il nodo 6 con c_{46}. Il costo ottenuto applicando l’algoritmo Greedy è:

$z^G = 4+8+c_{46}+4 = 16+c_{46}$. L’errore percentuale è quindi:

$$\frac{z^G - z*}{z*}*100 = \frac{(16+c_{46})-20}{20}*100 \to \infty \quad per \quad c_{46} \to \infty .$$

2) Il problema del caricamento di un veicolo

Un'azienda di trasporti riceve la seguente offerta di trasporto da parte di tre clienti:

Cliente k	**Ricavo** r_k	**Volume** c_k
1	65 €	200€
2	80 €	300 €
3	30 €	100 €

La capacità di carico del veicolo (in termini di volume) è pari a 500. Determinare quali clienti servire al fine di massimizzare il ricavo totale applicando la completa enumerazione e la programmazione dinamica. Determinare inoltre l'errore percentuale rispetto all'ottimo ottenuto applicando l'algoritmo Greedy.

Soluzione

1) Completa enumerazione:

Si hanno le seguenti soluzioni ammissibili:

nessun cliente ➔ ricavo totale: 0+0+0 = 0
solo il cliente 1 ➔ ricavo totale: 65+0+0 = 65
solo il cliente 2 ➔ ricavo totale: 0+80+0 = 80
solo il cliente 3 ➔ ricavo totale: 0+0+30 = 30
1 e 2 ➔ ricavo totale: 65+80 = 145
1 e 3 ➔ ricavo totale: 65+30 = 95
2 e 3 ➔ ricavo totale: 80+30 = 110

Si noti che 1, 2 e 3 non è ammissibile (richiederebbe una capacità di carico di 600!!). La soluzione ottima è quindi servire 1 e 2. Il ricavo totale ottimo è $z^* = 145$.

Si noti che la completa enumerazione è fattibile solo per un numero piccolo di clienti. Con tre clienti abbiamo esaminato $2^3 = 8$ soluzioni. Se i clienti fossero 20 avremmo $2^{20} = 1.048.576$ soluzioni e se i clienti fossero 40 ne avremmo $2^{40} = 1.099.511.627.776$ (!!).

2) Programmazione dinamica:

a) Stadi:

Il numero di decisioni è pari al numero di clienti ➔ 3 decisioni ➔ stadi: $k=1,2,3$.

b) Stati:

Per ogni stadio *k*, lo stato x_k (sintesi delle informazioni passate rilevanti per le decisioni future) indica la capacità di carico residua.

c) Controlli:

Il controllo $u_k(x_k)$ indica se servire il cliente *k*, dato la capacità di carico residua x_k. $u_k(x_k)$ vale quindi 1 se il cliente è servito e 0 altrimenti.

d) Sistema dinamico:

Il sistema evolve come segue:

$$x_{k+1} = x_k - c_k u_k(x_k)$$

Infatti, la capacità di carico residua al tempo *k+1* è uguale alla capacità di carico residua al tempo *k* se il cliente *k* non viene servito (vale a dire se $u_k(x_k) = 0$) ed è uguale alla capacità di carico residua al tempo *k* meno il volume occupato dal cliente *k* (vale a dire $x_k - c_k$) se il cliente *k* viene servito (vale a dire se $u_k(x_k) = 1$).

e) "Costi":

Il "costo" immediato $g_k(x_k, u_k)$ è pari al ricavo r_k del cliente *k* se $u_k(x_k) = 1$ e 0 altrimenti, vale a dire:

$$g_k(x_k, u_k) = r_k u_k .$$

Indichiamo con $J_k(x_k)$ il ricavo totale da *k* a 3, partendo dallo stato x_k in *k*.

L'algoritmo di programmazione dinamica può essere quindi scritto come segue:

$$J_4(x_4) = 0$$
$$J_k(x_k) = \max_{u_k}\{g_k(x_k, u_k) + J_{k+1}(x_{k+1})\} = \max_{u_k}\{r_k u_k + J_{k+1}(x_k - c_k u_k)\} \quad k = 1,2,3$$

Partiamo dallo stadio 3 (progetto 3):

x_3	$u_3(x_3) = 0$	$u_3(x_3) = 1$	$J_3{*}(x_3)$	$u_3{*}(x_3)$
0	0	-	0	0
100	0	30	30	1
200	0	30	30	1
300	0	30	30	1
400	0	30	30	1
500	0	30	30	1

Commentiamo alcuni dei calcoli. Consideriamo $x_3 = 100$ (capacità di carico residua pari a 100). Dato che il cliente 3 richiede un volume pari a 100, abbiamo due possibili controlli: non servire il cliente 3 o servirlo. Nel primo caso (colonna 2) il ricavo totale è pari a 0, mentre nel secondo è pari al ricavo del cliente 3, vale a dire 30. Quindi, partendo da una capacità di carico residua pari a 100, è ottimo servire il cliente 3 (vale a dire $u_3*(100)=1$).

Consideriamo ora lo stadio 2 (progetto 2):

x_2	$u_2(x_2)=0$	$u_2(x_2)=1$	$J_2*(x_2)$	$u_2*(x_2)$
0	0+0 = 0	-	0	0
100	0+30 = 30	-	30	0
200	0+30 = 30	-	30	0
300	0+30 = 30	80+0 = 80	80	1
400	0+30 = 30	80+30 = 110	110	1
500	0+30 = 30	80+30= 110	110	1

Commentiamo alcuni dei calcoli. Consideriamo $x_2=200$ (capacità residua pari a 200). Dato che il cliente 2 richiede un volume pari a 300, abbiamo un solo possibile controllo: non servire il cliente 2. Il ricavo totale corrispondente è pari a 30, perchè se non serviamo il progetto 2 la capacità di carico residua al tempo 3 è 200 e quindi il ricavo totale corrispondente è:

$$r_2u_2+J_3*(x_2-c_2u_2)=0+J_3*(200)=0+30=30.$$

Quindi, partendo da una capacità di carico residua pari a 200, è ottimo non servire il cliente 2 (vale a dire $u_2*(200)=0$).

Consideriamo $x_2=300$ (capacità di carico residua pari a 300). Dato che il cliente 2 richiede un volume pari a 300, abbiamo due possibili controlli: non servire il cliente 2 o servirlo. Nel primo caso, il ricavo totale è 30 perché se non serviamo il cliente 2 la capacità di carico residua al tempo 3 è 200 e quindi il ricavo totale corrispondente è:

$$r_2u_2+J_3*(x_2-c_2u_2)=0+J_3*(200)=0+30=30.$$

Nel secondo caso, il ricavo totale è 80 perché se serviamo il cliente 2 la capacità di carico residua al tempo 3 è 0 e quindi il ricavo totale corrispondente è:

$$r_2u_2+J_3*(x_2-c_2u_2)=80+J_3*(0)=80+0=80.$$

Quindi, partendo da una capacità di carico residua pari a 300, è ottimo servire il cliente 2 (vale a dire $u_2*(300)=1$), dato che il ricavo totale corrispondente (80) è maggiore di quello che si otterrebbe non servendo il cliente (30).
Infine, consideriamo lo stadio 1 (progetto 1):

x_1	$u_1(x_1)=0$	$u_1(x_1)=1$	$J_1*(x_1)$	$u_1*(x_1)$
500	0+110 =110	65+80 = 145	145	1

Commentiamo i calcoli. La capacità di carico residua è pari a 500. Dato che il cliente 1 richiede un volume pari a 200, abbiamo due possibili controlli: non servire il cliente 1 o servirlo. Nel primo caso, il ricavo totale è 110 perché se non serviamo il cliente 1 la capacità di carico residua al tempo 2 è 500 e quindi il ricavo totale corrispondente è:

$r_1 u_1 + J_2*(x_1 - c_1 u_1) = 0 + J_2*(500) = 0 + 110 = 110.$

Nel secondo caso, il ricavo totale è 145 perché se serviamo il cliente 1 la capacità di carico residua al tempo 2 è 300 e quindi il ricavo totale corrispondente è:

$r_1 u_1 + J_2*(x_1 - c_1 u_1) = 65 + J_2*(300) = 65 + 80 = 145.$

Quindi, è ottimo servire il cliente 1 (vale a dire $u_1*(500) = 1$), dato che il ricavo totale corrispondente (145) è maggiore di quello che si otterrebbe non servendo il cliente (110).

La soluzione ottima del problema è quindi: $u_1* = 1$, $u_2* = 1$, $u_3* = 0$. Il ricavo ottimo $z*$ è $J_1*(x_1) = 145$.

c) Algoritmo Greedy:

L'algoritmo Greedy seleziona ad ogni iterazione il cliente non ancora selezionato con ricavo maggiore, purchè il volume sia minore o uguale alla capacità di carico residua. In questo caso:

1) ordiniamo i clienti in ordine non-crescente sulla base del ricavo:

2-1-3

2) sulla base di questo ordinamento selezioniamo i clienti, purchè il volume sia minore o uguale alla capacità di carico residua:

iterazione	capacità di carico residua	cliente candidato	sì/no
1	500	2	sì (300<500)
2	500-300 = 200	1	sì (200=200)
3	200-200 = 0	3	no (100>0)

La soluzione ottenuta applicando l'algoritmo Greedy è quindi servire il cliente 1 e il cliente 2. Il ricavo totale corrispondente è $z^G = 145$. Quindi l'errore percentuale rispetto all'ottimo ottenuto applicando l'algoritmo Greedy è:

$$\frac{z* - z^G}{z*} * 100 = \frac{145 - 145}{145} * 100 = 0\%$$

Quindi l'algoritmo Greedy ha fornito in questo caso la soluzione ottima!!

Siti web relativi alla Programmazione dinamica

Dimitri Bertsekas, MIT http://web.mit.edu/dimitrib/www/home.html

Warren Powell, Princeton http://www.castlelab.princeton.edu/

Siti web relativi alla Ricerca Operativa

The Science of Better http://www.scienceofbetter.org/

INFORMS https://www.informs.org/

Associazione italiana di Ricerca Operativa http://www.airo.org/